

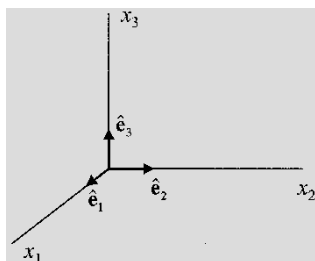


فصل (۱) مبانی ریاضی

Mathematical Foundations

۱-۱: نمادگذاری نمادین Symbolic Notation

در دستگاه کارتزین (راست خط متعامد):



$$x_i : x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

$$\hat{e}_i : \hat{e}_1 = \hat{i}, \hat{e}_2 = \hat{j}, \hat{e}_3 = \hat{k}$$

کمّیت‌های فیزیکی عبارتند از ($n^m \Rightarrow 3^m$):

کمّیت عددی (Scalar): با یک مقدار مشخص می‌شود و به دستگاه مختصات وابسته نیست (تانسور مرتبه‌ی صفر)، مانند:

جرم، طول، زمان و

$$3^0 = 1 \quad a$$

کمّیت برداری (Vector): با مقدار (مؤلفه) و جهت (یکه‌بردار) مشخص می‌شود و به دستگاه مختصات وابسته است (تانسور

مرتبه‌ی یک)، مانند: نیرو، سرعت، شتاب و

$$3^1 = 3 \quad \vec{a} = (a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ or } (a_1 \ a_2 \ a_3)$$

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i$$



دانشکده مهندسی مکانیک	مکانیک محیط پیوسته ۱	دکتر مهدی قنّاد
-----------------------	----------------------	-----------------

$$\cos \theta_i = \frac{a_i}{|\vec{a}|} = n_i$$

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1$$

$$\text{scalar } |\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$$

کمّیت تانسوری (Tensor): به دستگاه مختصات وابستگی چندگانه دارد و میزان وابستگی آن با مرتبه‌ی تانسور مشخص می‌شود. تانسور مرتبه‌ی دو مانند: تنش، کرنش و

$$3^2 = 9 \quad \tilde{a} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{a} \vec{x} = \vec{b} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1 \rightarrow 3$$

تمرین: مؤلفه‌های تانسور مرتبه‌ی سه (a_{ijk}) و مرتبه‌ی چهار (a_{ijkl}) را نمایش دهید.

۲-۱: نمادگذاری شاخصی Indicial Notation

قراردادهای جمع آینشتاین [Einstein 1916]:

۱- شاخص آزاد (free index) در هر جمله، فقط یک بار نوشته می‌شود.

۲- شاخص تکراری (dummy index) در هر جمله، فقط دو بار نوشته می‌شود.

۳- وجود شاخص آزاد در هر رابطه، در تمام جمله‌ها الزامی است.

۴- وجود شاخص تکراری در هر رابطه، در تمام جمله‌ها الزامی نیست.

۵- عمل جمع روی شاخص تکراری انجام می‌شود.



دانشکده مهندسی مکانیک	مکانیک محیط پیوسته ۱	دکتر مهدی قنّاد
-----------------------	----------------------	-----------------

$$\text{scalar } s = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_i x_i$$

$$\text{vector } \vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = a_i \hat{e}_i$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{a_i a_i} \neq \sqrt{a_i^2}$$

$$\cos \theta_i = n_i = \frac{a_i}{|\vec{a}|} = \frac{a_i}{\sqrt{a_j a_j}} \neq \frac{a_i}{\sqrt{a_i a_i}}, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow n_i n_i = 1$$

تمرین: درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص نمایید.

$$a_i = b_j \quad \times$$

$$a_{ij} x_j = b_i \quad \checkmark$$

$$T_{ij} = T_{jk} \quad \times$$

$$a_{ij} x_i x_j \quad \checkmark$$

$$a_{ii} x_i x_j x_j \quad \times$$

$$A_{im} A_{mj} = T_{ij} \quad \checkmark$$

$$\text{tensor } (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad \text{scalar}$$

$$\text{tensor } (x_i x_j) = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} \quad x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{scalar}$$

ترکیب بردارها:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = a_i \hat{e}_i \pm b_i \hat{e}_i = (a_i \pm b_i) \hat{e}_i = c_i \hat{e}_i \Rightarrow a_i \pm b_i = c_i$$